Application de la « linear shallow water theory »aux problèmes d'oscillations d'un liquide pesant dans un container, en présence de tension superficielles.

H. Essaouini[a], J. Elbahaoui[a], L. Elbakkali[a], P. Capodanno[b]

[a] Université Abdelmalek Essaadi, Faculté des Sciences, M2SM ER28/FS/05, 93000 Tétouan, Maroc

[b] Université de Franche-Comté, 2B Rue des jardins, 25000 Besançon, France

Résumé : *Nous appliquons la " linear shallow water theory" au problème des petites oscillations d'un liquide avec tensions superficielles dans un container partiellement rempli. Dans les deux cas considérés (régulier et singulier), nous donnons les approximations successives de la solution asymptotique du problème.*

Abstract : *We study the problem of small oscillations of liquid with surface tensions in partially filled tanks. Two cases are discussed (regular and singular) and the linear shallow water theory is used. For each case, we give the approximations of the asymptotic solution of the problem.*

Mots clefs : Liquide pesant, petites oscillations, tensions superficielles, linear shallow water theory.

1 Introduction

Le problème des petites oscillations d'un liquide parfait pesant dans un container a fait l'objet de nombreux travaux ([4], [3]).

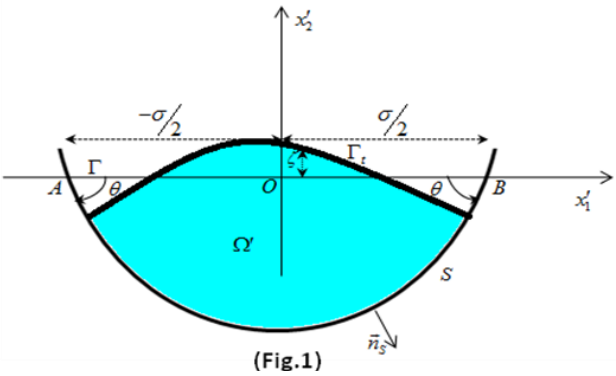
Quand la profondeur du liquide est beaucoup plus petites que le diamètre de la surface libre, on peut employer des méthodes approchées. L'hypothèse permet d'introduire un petit paramètre et on peut obtenir les approximations successives de la solution asymptotique du problème ([7], [8], [3]).

Une telle théorie peut s'appliquer aux oscillations du fuel dans un container quand le fuel occupe un petit volume.

Dans notre travail, nous reprenons le problème dans le cadre de la « linear shallow water theory » en tenant compte des tensions superficielles.

Pour simplifier, nous considérons le problème plan.

2 Position du problème



(Fig.1)

2.1 Etude de l'équilibre du système

A l'équilibre, le liquide parfait incompressible (densité ρ), pesant occupe un domaine Ω limité par une paroi solide S et la ligne libre Γ, la profondeur du liquide étant supposée petite devant la longueur de Γ .

Nous étudions les petites oscillations du liquide autour de sa position d'équilibre, en théorie linéaire.

Le potentiel des vitesses $\Phi'(x_1', x_2', t)$ doit vérifier classiquement

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x_2'^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial n}\Big|_S = 0 \tag{2}$$

D'autre part , d'après la formule de Bernoulli, la pression dynamique p' est donnée par

$$p' = -\rho \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \tag{3}$$

Utilisons les lois de la capillarité.

i) La loi de Laplace à l'équilibre s'écrit :

$$-\rho g x_2' = -\frac{\tau}{R_0}$$

où τ est la tension superficielle supposée constante et R_0 le rayon de courbure de la ligne libre Γ . Nous nous plaçons dans le cas $R_0 \equiv \infty$: Γ est donc portée par la droite $x_2' = 0$. [Fig. 1]

ii) Ecrivons la loi de Laplace pendant le mouvement . Si la ligne libre en mouvement Γ_t a pour équation $x_2' = \zeta(x_1', t)$, sa courbure, en théorie linéaire, est $\zeta''\left(= \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1'^2}\right)$ et la loi de Laplace s'écrit

$$p'_{|\Gamma} = \rho g \zeta - \tau \zeta'' \tag{4}$$

iii) Ecrivons maintenant que Γ_t coupe S sous un angle constant.

Nous bornant au cas symétrique, nous avons [5] avec les notations de la figure et R étant le rayon de courbure de S en A et B :

$$\zeta'\left(\pm\frac{\sigma}{2}, t\right) = \pm \frac{1}{R \sin\theta} \zeta\left(\pm\frac{\sigma}{2}, t\right) \tag{5}$$

Puisque $\dot{\zeta} = \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2}\left(x'_1, 0, t\right)$, (3) et (4) donnent

$$-\rho \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} = \rho g \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_2} - \tau \frac{\partial^2}{\partial x'^2_1}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x'_2}\right) \text{ sur } \Gamma \quad (6)$$

Enfin, la condition exprimant la constance du volume du liquide est

$$\int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_2}\left(x'_1, 0, t\right) dx'_1 = 0 \quad (7)$$

2.2 Variables adimensionnelles

Pour introduire ensuite un petit paramètre, nous passons en variables adimensionnelles en posant

$$x'_i = \sigma x_i \quad (i = 1, 2) \ ;$$

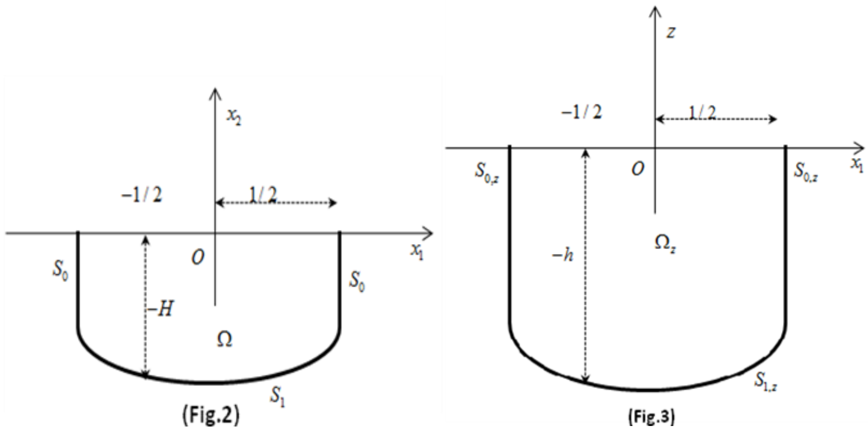
$$\Phi\left(x_1, x_2, t\right) = \Phi'\left(x'_1, x'_2, t\right)$$

Nous obtenons facilement les équations vérifiées par $\Phi\left(x_1, x_2, t\right)$ et nous en cherchons les solutions de la forme $e^{i\omega t}\Phi\left(x_1, x_2\right)$, ω réel.

Nous n'écrivons pas les équations vérifiées par $\Phi\left(x_1, x_2\right)$, car elles vont être transformées.

Nous devons distinguer deux cas : le cas régulier où le minimum de la hauteur du liquide est strictement positif et le cas singulier où ce minimum est nul, lequel présente des difficultés du point de vue mathématique [6]. Nous détaillerons le premier et donnerons des indications sur le second.

3 Application de la « linear shallow water theory » au cas régulier.



(Fig.2) (Fig.3)

Nous supposons que S se décompose en S_0 vertical et S_1 d'équation $x_2 = -H\left(x_1\right)$, où H est strictement positive dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre [Fig. 2].

Nous posons $x_2 = z\sqrt{\varepsilon}$; $H(x_1) = h(x_1)\sqrt{\varepsilon}$ et nous obtenons la figure transformée dans le plan Ω_z [Fig. 3].

Posons

$$\Phi\left(x_1,x_2\right)=\Phi\left(x_1,z\sqrt{\varepsilon}\right)=\hat{\Phi}\left(x_1,z\right)$$

Nous obtenons les équations vérifiées par $\hat{\Phi}\left(x_1,z\right)$

$$\varepsilon\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial z^2}=0 \text{ dans } \Omega_z \tag{8}$$

$$\frac{\partial\hat{\Phi}_1}{\partial x_1}=0 \text{ pour } z=0 \text{ , } x_1=\pm\frac{1}{2} \tag{9}$$

$$\frac{\partial\hat{\Phi}_1}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial\hat{\Phi}_1}{\partial x_1}h'(x_1) \text{ pour } z=-h(x_1) \tag{10}$$

$$\int_\Gamma\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial z}d\Gamma=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial z}\Big|_{z=0}\right)=0 \text{ pour } x_1=\pm\frac{1}{2} \tag{12}$$

$$\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial z}-\frac{\tau}{\rho g\sigma^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial z}\right)=\lambda\hat{\Phi} \text{ pour } z=0 \tag{13}$$

$$\text{avec}\quad \lambda=\frac{\sigma\omega^2}{g}\sqrt{\varepsilon}$$

Nous cherchons la solution du problème sous la forme d'un développement asymptotique de puissance de ε :

$$\hat{\Phi}\left(x_1,z,\varepsilon\right)=\hat{\Phi}_0\left(x_1,z\right)+\varepsilon\ \hat{\Phi}_1\left(x_1,z\right)+\varepsilon^2\ \hat{\Phi}_2\left(x_1,z\right)+\cdots ;$$

$$\lambda\left(\varepsilon\right)=\lambda_0+\varepsilon\ \lambda_1+\varepsilon^2\ \lambda_2+\cdots$$

4 Les approximations d'ordre zéro et d'ordre un

i) Des calculs très simples donnent

$$\lambda_0=0\ ;\ \hat{\Phi}_0=v(x_1)\ ;\ v'\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0\ ,$$

$v(x_1)$ étant à déterminer à l'étape suivante.

ii) Les équations de l'approximation d'ordre un sont

$$\frac{\partial^2\hat{\Phi}_1}{\partial z^2}=-v''\left(x_1\right)\ ;\ \frac{\partial\hat{\Phi}_1}{\partial x_1}\left(\pm\frac{1}{2},0\right)=0\ ;\ \frac{\partial\hat{\Phi}_1}{\partial z}-\frac{\tau}{\rho g\sigma^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial\hat{\Phi}_1}{\partial z}\right)=\lambda_1 v\left(x_1\right) \text{ pour } z=0\ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\hat{\Phi}_1}{\partial z}\Big|_{z=0}\right)=0 \text{ pour } x_1=\pm\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\partial\hat{\Phi}_1}{\partial z}=-h'\left(x_1\right)v'\left(x_1\right) \text{pour } z=-h\left(x_1\right)\ ;$$

$$\int_\Gamma\frac{\partial\hat{\Phi}_1}{\partial z}d\Gamma=0\ .$$

Elles donnent successivement

$$\hat{\Phi}_1=-\frac{1}{2}v''\left(x_1\right)z^2+\alpha\left(x_1\right)z+w_1\left(x_1\right)\ ;\ w_1'\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0\ ;\ \alpha\left(x_1\right)-\frac{\tau}{\rho g\sigma^2}\alpha''\left(x_1\right)=\lambda_1 v\left(x_1\right)$$

$$\alpha'\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0\ ;\ \frac{d}{dx_1}\left(h(x_1)v'(x_1)\right)+\alpha(x_1)=0\ ;\int_{-1/2}^{1/2}\alpha(x_1)\,dx_1=0\ .$$

Intégrant la troisième, on obtient $\int_{-1/2}^{1/2}v(x_1)\,dx_1=0$.

Au lieu de considérer directement le problème pour $v(x_1)$, nous traitons le problème pour $\alpha(x_1)$, λ_1 et v étant supposés connus.

$$\alpha(x_1)-\frac{\tau}{\rho g\sigma^2}\alpha''(x_1)=\lambda_1 v(x_1)\ ;\ \int_{-1/2}^{1/2}\alpha(x_1)\,dx_1=0\ ;\ \alpha'\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0$$

La formulation variationnelle de ce problème est :

Trouver $\alpha(\cdot)\in\tilde{H}^1\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left\{\alpha\in H^1\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\ \int_{-1/2}^{1/2}\alpha(x_1)\,dx_1=0\right\}$ tel que

$$a(\alpha,\tilde{\alpha})\overset{\text{def}}{=}\int_{-1/2}^{1/2}\alpha\bar{\tilde{\alpha}}\,dx_1+\frac{\tau}{\rho g\sigma^2}\int_{-1/2}^{1/2}\alpha'\bar{\tilde{\alpha}}'\,dx_1=(\lambda_1 v,\tilde{\alpha})_{\tilde{L}^2}\qquad\forall\tilde{\alpha}\in\tilde{H}^1$$

où $(.\,,\,.)_{\tilde{L}^2}$ est le produit scalaire de $\tilde{L}^2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left\{u\in L^2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\ \int_{-1/2}^{1/2}u\,dx_1=0\right\}$.

Classiquement, si Q_0 est l'opérateur non borné de $\tilde{L}^2$ associé à $a(.\,,\,.)$ et au couple $\left(\tilde{H}^1,\tilde{L}^2\right)$, nous avons

$$\alpha=\lambda_1 Q_0^{-1}v$$

On détermine alors $v(x_1)$ et λ_1 en résolvant le problème de valeurs propres

$$-\frac{d}{dx_1}(hv')=\lambda_1 Q_0^{-1}v\ ;\ \int_{-1/2}^{1/2}v\,dx_1=0\ ;\ v'\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0$$

La formulation variationnelle de ce problème est :

$$\int_{-1/2}^{1/2}hv'\bar{\hat{v}}'\,dx_1=\lambda_1\left(Q_0^{-1}v,\hat{v}\right)_{\tilde{L}^2}\quad\forall\hat{v}\in\tilde{H}^1$$

Puisque, dans le cas régulier, $\min h(x_1)>0$, le premier membre est un produit scalaire dans $\tilde{H}^1$ d'après l'inégalité de Poincaré.

Appelant $\tilde{M}_0$ l'opérateur non borné de $\tilde{L}^2$ associé, nous avons

$$\tilde{M}_0 v=\lambda_1 Q_0^{-1}v$$

Posant

$$\tilde{M}_0^{1/2}v=v^*\ \text{ et }\ B=\tilde{M}_0^{-1/2}Q_0^{-1}\tilde{M}_0^{-1/2}\ ,$$

Nous obtenons

$$Bv^*=\lambda_1^{-1}v^*$$

B, étant borné dans $\tilde{L}^2$, autoadjoint, défini positif , compact , a des valeurs propres λ_{1j} strictement positives. Les valeurs propres de notre problème sont donc

$0<\lambda_{11}\le\lambda_{12}\le\ldots\le\lambda_{1n}\le\ldots\ ;\ \lambda_{1n}\to\infty$ quand $n\to\infty$

Les éléments propres v_n^* de B forment un base orthonormale de $\tilde{L}^2$, de sorte que les éléments propres v_n du problème vérifient

$$\left(Q_0^{-1}v_n,v_m\right)_{\tilde{L}^2}=\begin{cases}0 & \text{if}\quad m\neq n\\ \lambda_{1n}^{-1} & \text{if}\quad m=n\end{cases}$$

4 L'approximation d'ordre deux

Opérant comme précédemment, on obtient pour w_1 et λ_2 le problème

$$-\frac{d}{dx_1}\left(hw_1'\right)-\lambda_1 Q_0^{-1}w_1 = f\left(v\right)+\lambda_2 Q_0^{-1}v \ ; \ \int_{-1/2}^{1/2} w_1\left(x_1\right)dx_1 = 0 \ ; \ w_1'\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0$$

avec
$$f\left(v\right)=\frac{d}{dx_1}\left[\frac{1}{6}h^3 v''' - \frac{1}{2}h^2\frac{d^2}{dx_1^2}\left(hv'\right)\right]$$

il s'agit d'ailleurs, non d'un problème, mais d'une infinité dénombrable de problèmes obtenus en remplaçant λ_1 par λ_{1k} et v par v_k .

D'après les résultats obtenus plus haut, le problème homogène associé à d'autres solutions que la solution triviale. Donc, le problème n'est possible que si le second membre est orthogonal dans $\tilde{L}^2$ aux éléments propres v_k correspondant à λ_{1k} .

Par exemple, si les λ_{1k} sont des valeurs propres simples, on a

$$\left(f\left(v_k\right)+\lambda_{2k}Q_0^{-1}v_k, v_k\right)_{\tilde{L}^2} = 0 \text{ (sans sommation sur } k \text{),}$$

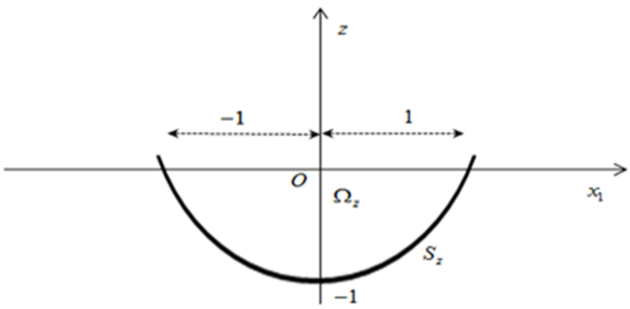
et donc

$$\lambda_{2k} = -\lambda_{1k}\left(f\left(v_k\right), v_k\right)_{\tilde{L}^2}$$

On peut démontrer que la détermination de w_1 nécessite le calcul de l'approximation d'ordre trois.

5 Application de la « linear shallow water theory » au cas singulier.

C'est le cas ou le minimum de la profondeur du liquide est égal à zéro. Nous nous bornons, comme dans [3], au cas du container parabolique [Fig.4].



(Fig. 4)

Le domaine Ω_z est limité par l'axe x_1 et la parabole $z = x_1^2 - 1$.

L'équation (9), qui est la condition d'imperméabilité de la paroi verticale S_0 , disparait.

Des calculs analogues aux précédents, mais un peu plus compliqués, montrent que pour déterminer $w = v - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v\left(x_1\right)dx_1$ et λ_1 , nous avons le problème de valeurs propres :

$$(P) \qquad -\frac{d}{dx_1}\left[\left(1-x_1^2\right)w'\right] = \lambda_1 Q_0^{-1}w \ ; \ \int_{-1}^{1} w\left(x_1\right)dx_1 = 0$$

sans conditions aux limites ; mais le coefficient de w'' s'annule pour $x_1 = \pm 1$.

Pour résoudre le problème (P), on peut utiliser les résultats obtenus dans [2] relatifs aux opérateurs de Legendre.

Soit $\tilde{V}=\left\{u\in\tilde{L}^2(-1,1);\ \sqrt{1-x_1^2}\ u'\in L^2(-1,1)\right\}$ qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$a(u,\tilde{u})=\int_{-1}^{1}\left[\left(1-x_1^2\right)u'\bar{\tilde{u}}'+u\bar{\tilde{u}}\right]dx_1$$

L' injection de $\tilde{V}$ dans $\tilde{L}^2(-1,1)$ est dense, continue et compacte. La formulation variationnelle de (P) est

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x_1^2\right)w'\bar{W}'dx_1=\lambda_1\left(Q_0^{-1}w,W\right)_{L^2}\quad \forall W\in\tilde{V}\ .$$

On démontre que le premier membre est un produit scalaire de $\tilde{V}$ et on peut alors achever comme dans le cas régulier.

On peut aussi utiliser la théorie générale élaborée dans [1], résumée dans [6], concernant les opérateurs elliptiques non dégénérés, théorie qu'il convient d'appliquer dans le cas d'un container de forme quelconque.

Considérons dans notre cas l'opérateur (de Legendre)

$$\tilde{L}_0=-\frac{d}{dx_1}\left[\left(1-x_1^2\right)\frac{d}{dx_1}\right]$$

sans conditions aux limites.

On démontre que $\tilde{L}_0$ est un opérateur non borné de $\tilde{L}^2(-1,1)$, de domaine

$$D\left(\tilde{L}_0\right)=\left\{w\in\tilde{H}^1(-1,1);\ \ \left(1-x_1^2\right)w\in H^2(-1,1)\right\}$$

à inverse auto-adjoint compact.

Le problème (P) est donc : trouver $w\in D\left(\tilde{L}_0\right)$ et $\lambda_1\in IR$ tels que

$$\tilde{L}_0 w=\lambda_1 Q_0^{-1}w\ ,$$

et on achève comme dans le cas régulier.

Références

[1] M.S. Baouendi, C. Goulaouic, Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérées, Arch. Rat. Mech. Anal. 34 (1969) 361-379

[2] R. Dautray, J.L. Lions, Analyse Mathématique et calcul numérique, Vol. 5, Masson, Paris, 1988.

[3] N.D. Kopachevsky, S. G. Krein, Operator approach to linear problems of hydrodynamics, Vol. 1, Chap 5, Birkhauser, Bâle, 2001.

[4] N.N. Moiseyev, V.V. Rumyantsev, dynamic stability of bodies containing fluid, Springer, Berlin, 1968.

[5] H.J.P. Morand, R.Ohayon, Iinteractions fluides-structures, Masson, Paris, 1992.

[6] J. Sanchez Hubert and E. Sanchez Palencia, Vibration and coupling of continuous systems, Asymptotic methods, Chap II, Springer, Berlin, 1989.

[7] J.J. Stoker, Water waves, The mathematical theory with applications , Intersciences Publishers, New York, 1957.

[8] J.V. Wehausen, E.V. Laitone, Surface waves, Encyclopedia of Physics, Volume IX – Fluid Dynamics III , pp 446 – 778, Springer Verlag, Berlin, 1960.